Clase 14: Fórmula del Cambio de Variables

C.J. Vanegas

4 de junio de 2008

Recordemos 0.1. *Método de sustitución en integrales de una variable:*

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(s)\,ds$$

$$\begin{aligned} s = g(t) &\;\Rightarrow\; ds = g'(t)dt \\ t = a &\;\Rightarrow\; s = g(a) \\ t = b &\;\Rightarrow\; s = g(b) \end{aligned}$$

donde f es continua y $s = g(t)$ es una función C^1 en $[a, b]$. Ahora supongamos que $s = g(t)$ es, además de C^1, inyectiva en $[a, b]$, entonces $g'(t) \geq 0$ o $g'(t) \leq 0$ en $[a, b]$ y reescribimos la fórmula como:

$$\int_a^b f(g(t))|g'(t)|\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(s)\,ds$$

Ahora cambiemos de notación: Sea $t = u$, $g = x$, $g(t) = x(u)$, $g'(t) = x'(u) = \frac{dx}{du}$, $dt = du$, $s = x$, $ds = dx$ y si $I^* = [a, b]$ y $[g(a), g(b)] = [x(a), x(b)] = I$ entonces la fórmula queda:

$$\int_{I^*} f(x(u))\left|\frac{dx}{du}\right| du = \int_I f(x)\,dx$$

Esta fórmula se generaliza a integrales dobles: $I^* \sim D^*$, $I \sim D$ y $\left|\frac{dx}{du}\right| \sim \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right|$

Teorema 1 (Fórmula del cambio de variables)**.** *Sean D y D^* regiones elementales en $\mathbb{R}^2$ y sean $T : D^* \to D$, $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, C^1, 1-1 (salvo quizás en ∂D^*) y además $T(D^*) = D$. Entonces para cualquier función integrable $f : D \to \mathbb{R}$ se tiene:*

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D^*} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$$

Ejemplo 1. *Resolver $\displaystyle\iint_D (x-y)\,dxdy$, si D es la región $D = \{(x,y) :\ 0 \le x \le 1,\ 1 + x \le y \le 2 + 2x\}$, usando el cambio de variables $x = u$, $y = v(1+u)$. Dibuje D*

Solución 1. *T no es T.L., $T(u,v) = (u, v(1+u))$. T es C^1 pues cada coordenada lo es.*

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & 1+u \end{vmatrix} = 1 + u \neq 0,\ \textit{para}\ u \neq -1$$

Si $u \neq -1$ entonces puedo resolver de manera única u, v en función de x, y.

$$\begin{aligned} x &= u \Rightarrow 0 \le u \le 1 \\ y &= v(1+u) \Rightarrow y = v(1+x) \Rightarrow v = y/(1+x),\ x \neq -1 \\ 1 + x &\le y \le 2 + 2x \Rightarrow 1 \le y/(1+x) \le 2 \Rightarrow 1 \le v \le 2 \end{aligned}$$

$D^* = [0,1] \times [1,2]$. $f(x,y) = x - y$, $f(x(u,v), y(u,v)) = f(u, v(1+u)) = u - v(1+u)$.

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)\,dxdy &= \iint_{D^*} (u - v(1+u))(1+u)\,dudv \\ &= \int_0^1 \int_1^2 (u - v(1+u))(1+u)\,dvdu \\ &= \int_0^1 \int_1^2 u + u^2 - v(1+u)^2\,dvdu \\ &= \int_0^1 (u+u^2)v - \frac{v^2}{2}(1+u)^2 \Big|_1^2\,du \\ &= \int_0^1 (u+u^2) - \frac{3}{2}(1+u)^2\,du \\ &= \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{1}{2}(1+u)^3 \Big|_0^1 \\ &= 1/2 + 1/3 - 4 + 1/2 \\ &= -8/3 \end{aligned}$$

Ejemplo 2. *Calcular la* $\iint_D x^2y^2\,dxdy$, *en donde* D *es la región limitada por las hipérbolasequilateras* $xy=1$, $xy=2$ *y las rectas* $y=x/2$ *y* $y=3x$, *y en el primer cuadrante, usando el cambio:* $x=(u/v)^{1/2}$ *y* $y=(uv)^1/2$. *Dibuje la región* D.

Solución 2. *T no es lineal. T es 1-1:* $(u/v)^{1/2}=(\tilde{u}/\tilde{v})^{1/2}$ *y* $(uv)^{1/2}=(\tilde{u}\tilde{v})^{1/2}\Rightarrow(u/v)=(\tilde{u}/\tilde{v})$ *y* $(uv)=(\tilde{u}\tilde{v})$ *si* $u,v,\tilde{u},\tilde{v}>0\Rightarrow u=\dfrac{\tilde{u}v}{\tilde{v}}\Rightarrow\dfrac{\cancel{\tilde{u}}v}{\tilde{v}}v=\cancel{\tilde{u}}\tilde{v}\Rightarrow v^2=\tilde{v}^2\Rightarrow v=\tilde{v}$, *todos distintos de 0,* $\Rightarrow u=\tilde{u}$.

T es C^1 para $u,v\neq 0$. Resolvemos u,v en función de x,y: $x=(u/v)^{1/2}$ *y* $y=(uv)^{1/2}\Rightarrow xy=(u/v)^{1/2}(uv)^{1/2}=(\dfrac{u}{\cancel{v}}u\,\cancel{v})^{1/2}=u$ *y* $\dfrac{y}{x}=(\dfrac{uv}{u/v})^{1/2}=(\dfrac{uv^2}{u})^{1/2}=v$.

Luego: $u=xy$, $xy=1\to u=1$ *y* $xy=2\to u=2\Rightarrow 1\leq u\leq 2$.

$v=y/x$, $y=x/2\to v=1/2$ *y* $y=3x\to v=3\Rightarrow 1/2\leq v\leq 3$. *Observe que u,v son distintos de 0 y positivos.*

Jacobiano: usamos $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)})^{-1}$. *En este caso es más fácil calcular* $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} y & x \\ -y/x^2 & 1/x\end{vmatrix}=y/x+y/x=2y/x=2v$$

luego $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1/2v$. *Por otro lado*

$$f(x,y)=x^2y^2\Rightarrow f(x(u,v),y(u,v))=f((u/v)^{1/2},(uv)^{1/2})=\frac{u}{v}uv=u^2,\ \textit{pues } v\neq 0$$

Así:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D x^2y^2\,dxdy &= \iint\limits_{D^*} u^2\frac{1}{2v}\,dudv\\
&= \int_1^2\int_{1/2}^3\frac{u^2}{2v}\,dvdu\\
&= \int_1^2\frac{u^2}{2}\ln(v)\Big|_{1/2}^3\,du\\
&= \int_1^2\frac{u^2}{2}(\ln(3)+\ln(2))\,du\\
&= \int_1^2\frac{u^2}{2}\ln(6)\,du\\
&= \frac{\ln(6)}{6}u^3\Big|_1^2\\
&= \frac{\ln(6)}{6}8-\frac{\ln(6)}{6}\\
&= \frac{7}{6}\ln(6)
\end{aligned}$$

El cambio de variables a coordenadas polares

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D^*} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))r : dudv$$

(Válida para $T : D^* \to D$ 1-1 salvo quizás los puntos frontera de D^*). $x = r\cos(\theta)$ y $y = r\sin(\theta)$. Si queremos T inyectiva: $r \geq 0$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Si $r = r_0$, r_0 =constante en el plano $r\theta$, entonces $x^2 + y^2 = r_0^2\cos^2(\theta) + r_0^2\sin^2(\theta) = r_0^2$, es decir, r =cte (rectas)$\to$ $x^2 + y^2 = (\text{cte})^2$ (círculos).

$\theta = \theta_0$ en el plano $r\theta$ corresponde a las rectas radiales $y = (\tan(\theta)x)$ en el plano xy:
Si $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \to x = 0$.

- Cuadriláteros curvilíneos limitados por <u>sectores circulares</u> y rectas radiales como por ejemplo $D = \{(x,y) : \ r_0^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_1^2, \ \tan(\theta_0)x \leq y \leq \tan(\theta_1)x\}$ corresponden en el plano $r\theta$ al rectángulo $D^* = [r_0, r_1] \times [\theta_0, \theta_1]$.
- Con respecto al Jacobiano: $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$. Si $r = 0$ (T no es 1-1 en $r = 0$) sigue siendo válida la fórmula porque $r = 0$ corresponde a uno de los lados de D^* que es la gráfica de una curva suave y por lo tanto es irrelevante a efectos de integración.
- Sugerencia para usar el cambio de coordenadas polares:
  - cuando en la región de integración se presentan anillos circulares o trozos de ellos.
  - cuando en la función $f(x,y)$ a integrar aparezca de alguna forma las expresiones: $x^2 + y^2$ y/o $\frac{y}{x}$ que se convertirían en r^2 y $\tan(\theta)$ respectivamente.

Ejemplo 3. *Calcular* $\displaystyle\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$. *$D$ =región limitada por la elipse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Solución 3.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{a} = r\cos\theta \\ \frac{y}{b} = r\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} x = ar\cos\theta & 0 \leq r \leq 1 \\ y = br\sin\theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array}$$

$$\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dxdy = \sqrt{1 - r^2}$$

$$J = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\sin\theta \end{vmatrix} = abr\cos^2\theta + abr\sin^2\theta = abr$$

$$|J| = |abr| = abr$$

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \dots &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1-r^2}abr\ d\theta dr \\
&= 2\pi ab \int_0^1 \sqrt{1-r^2} r\ dr \\
&= 2\pi ab(-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}})\Big|_0^1 \\
&= \frac{2}{3}\pi ab
\end{aligned}$$

Ejemplo 4. *Calcular el área del anillo elíptico limitado por la elipse* $x^2+4y^2=4$, $x^2+4y^2=16$

Solución 4.

$$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{1^2}=1;\ \frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{1^2}=4$$
$$\frac{x}{2}=r\cos\theta,\ \frac{y}{1}=r\sin\theta$$

$$x=2r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$$
$$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{1^2}=r^2$$

Si $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{1^2}=1 \to r=1$, *si* $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{1^2}=4 \to\ r=2.$
D^*: $1 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D dxdy &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} 2\cdot 1\cdot r\ d\theta dr \\
&= 4\pi \int_1^2 r\ dr \\
&= 4\pi \frac{r^2}{2}\Big|_1^2 \\
&= 4\pi(2-\frac{1}{2}) = 6\pi
\end{aligned}$$

Fórmula del cambio de variables para integrales triples

Sean W^* una región elemental en el espacio uvw, W una región en el espacio xyz, $T: W^* \to W$, definida por $T(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$, de clase C^1 e inyectiva excepto quizás en un conjunto que es unión de gráficas de funciones de dos variables. Entonces:

$$\iiint\limits_{W} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{W^*} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$$

donde

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}\right|$$

El valor absoluto del Jacobiano es igual al volumen del paralelepípedo determinado por las vectores columna y mide como T distorsiona el volumen de su dominio.

Aplicación a coordenadas cilíndricas.

Introducimos 3 nuevas coordenadas para un punto $P = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, denotadas por r, θ, y z según las fórmulas:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$

o en forma equivalente consideramos $T : W^* \to \mathbb{R}^3$ $T(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$

- Llamamos a la terna (r,θ,z) coordenadas cilíndricas del punto P
- Para que T sea inyectiva: $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Recomendado: para problemas con simetría cilíndrica (simetría respecto a una recta).
- La ecuación de un cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ se ve en coordenadas cilíndricas $r = a$.
- Jacobiano: $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r$
- $\displaystyle\iiint\limits_{W} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{W^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\,drd\theta dz$
- Se usa por lo general cuando la región de integración consta de cilindros o planos de la forma $Ax + By = 0$

Ejemplo 5. *Calcular* $\iiint_W 1 + (x^2+y^2)^2\,dxdydz$*,* W *es la región limitada por el cono* $z = \sqrt{x^2+y^2}$ *y el plano* $z = 2$*.*

Solución 5. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$. $1 + (x^2+y^2)^2 \to 1 + r^4$. $W : z = \sqrt{x^2+y^2} \to z = r$ *y* $z = 2 \to z = 2$ $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$. *Luego*

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_W \ldots &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 (1+r^2)r\, dzdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (1+r^2)r(2-r)\, drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (2r - r^2 + 2r^5 - r^6)\, drd\theta \\
&= \frac{92}{\pi}
\end{aligned}$$

Ejemplo 6. *Calcular el volumen de la región W limitada por los paraboloides $z = x^2 + y^2$, $z = 4x^2 + 4y^2$, el cilindro $y = x^2$ y el plano $y = 3x$.*

Solución 6. $0 \le x \le 3$, $x^2 \le y \le 3x$ $z = x^2 + y^2 \to z = r^2$. $z = 4x^2 + 4y^2 \to z = 4r^2$, *luego* $r^2 \le z \le 4r^2$. *Proyección en el plano xy: es la región comprendida entre la parábola $y = x^2$:* $r\sin\theta = r^2\cos^2\theta \to r = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$, *y la recta $y = 3x$:* $r\sin\theta = 3r\cos\theta \to \theta = \arctan(3)$. *Así* $0 \le r \le \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$, $0 \le \theta \le \arctan(3)$

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_W dV &= \int_0^{\arctan(3)}\int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}\int_{r^2}^{4r^2} r\, dzdrd\theta \\
&= \int_0^{\arctan(3)}\int_0^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} 3r^3\, drd\theta \\
&= \frac{3}{4}\int_0^{\arctan(3)} \frac{\sin^4\theta}{\cos^8\theta}\, d\theta \\
&= \frac{3}{4}\int_0^{\arctan(3)} \tan^4\theta(1+\tan^2\theta)\sec^2\theta\, d\theta, \quad \textit{hacer } t = \tan\theta,\ dt = \sec^2\theta\, d\theta \\
&= \frac{3}{4}\int_0^3 t^4(1+t^2)\, dt \\
&= \frac{9477}{35}
\end{aligned}$$